# Estimación adaptativa de parámetros en un sistema dinámico no lineal

Yuriria Cortés Poza

Universidad Nacional Autónoma de México
yuriria@ciencias.unam.mx

**Resumen.** En este trabajo se construye una red neuronal, entrenada mediante un algoritmo genético, capaz de estimar los parámetros de un sistema dinámico no lineal con comportamiento caótico, a partir de una serie de tiempo de las variables del sistema. Se tomó como caso de estudio un *ratchet* determinista, un sistema de en una partícula en un potencial periódico asimétrico, sobre la cual actúa una fuerza externa armónica. Este sistema complejo, altamente no lineal y no integrable, es de sumo interés tanto por sus aplicaciones biológicas como por la dinámica que presenta. La red estima de manera eficiente y confiable los parámetros en este sistema, tanto en los casos en los que la partícula en el potencial exhibe un comportamiento periódico, como en los casos en donde el comportamiento es caótico.

## 1 Introducción

En un sistema dinámico existen parámetros que caracterizan su comportami Frecuentemente estos parámetros son desconocidos y no pueden ser medidos tamente, por lo cual, el monitoreo debe de llevarse a cabo mediante observaci del sistema. Estas observaciones son cantidades medibles que dependen de rámetros. El objetivo entonces es determinar el valor de estos parámetros, a parti una serie de tiempo de alguna variable del sistema. El problema de la *estimación parámetros*, requiere, en la mayoría de los casos la solución de un problema optimización [Bard 74, Beck 77, Gallant 87]. Cuando el sistema dinámico que siendo modelado es no lineal, el problema de estimación de parámetros se complicado, y el desempeño de métodos tradicionales que existen en la literat puede ser bastante pobre. La estimación de parámetros en sistemas no lineales problema computacional importante con aplicaciones en diversas áreas, tanto ficas como tecnológicas [Jorgensen 01, Park, Froment, 98, Whigham, Rechnagel

La técnica que aplicamos nosotros en este trabajo, combina las redes neurona con la teoría de algoritmos genéticos, utilizando un criterio de mínimos cuadr para determinar la convergencia. El método encuentra el valor de los parámetro un sistema dinámico no lineal de forma eficiente y confiable. La información requiere para la estimación son únicamente las mediciones tomadas del compc miento del sistema, es decir, una serie de tiempo de las variables importantes.

me conocimiento alguno del operador de estimación como lo hacen métodos licionales, y siempre se converge a un óptimo global.

método que proponemos se examina bajo diferentes condiciones aplicándolo a sistema dinámico no lineal, con comportamiento caótico, que en los últimos años despertado un gran interés [Cortés 2000, Magnasco 93, Sarmiento, Larralde 99]. bajamos con una partícula en un potencial periódico asimétrico en el que actúa fuerza externa armónica dependiente del tiempo. Este sistema, llamado *Ratchet* gran interés por sus propiedades dinámicas, ya que la fuerza externa aplicada, combinación con la asimetría del potencial, producen direccionalidad en el flujo partículas, comportamiento que depende sensiblemente de los parámetros del ema (la masa de la partícula, la fricción, y la amplitud y la frecuencia de la fuer- externa aplicada). Este problema es altamente no lineal y para ciertos valores de parámetros presenta un comportamiento caótico. Entre las aplicaciones que tie- los ratchets esta el entender el transporte unidireccional de motores moleculares, buscar nuevos métodos para la separación de partículas, entre otros [Reimann 2].

## Ratchet determinista

ıque en algunos trabajos se considera la presencia de ruido, muy recientemente, habido motivaciones para entender con detalle las propiedades de transporte de hets determinísticos [Jung 1996, Mateos 00, 02]. Estos ratchets tienen en general dinámica caótica clásica que determina las propiedades de transporte. En este ajo no se toma en cuenta ningún tipo de ruido, por lo que la dinámica es deter- ista. La ecuación de movimiento está dada por:

$$m(d^2x/dt^2) + \bullet(dx/dt) + dV(x)/dx = F_0 \cos(\bullet_D t) \ . \qquad (1)$$

m es la masa de la partícula, $\bullet$ el coeficiente de fricción, V(x) el potencial ódico asimétrico externo, $F_0$ la amplitud de la fuerza externa aplicada, y $\bullet_D$ la iencia de la fuerza. El potencial del ratchet está dado por (Fig.1):

$$V(x) = V_1 - V_0 \mathrm{sen}[2\bullet(x-x_0)/L] - (V_0/4)\ \mathrm{sen}\ [4\bullet(x-x_0)/L] \qquad (2)$$

L es la periodicidad del potencial, $V_0$ la amplitud y $V_1$ una constante arbitra- El potencial se desplaza una cantidad $x_0$ de tal forma que el mínimo se encuen- el origen. Ya que la ecuación de movimiento es no lineal, obtendremos órbi- eriódicas y caóticas dependiendo del valor de los parámetros: m, $F_0$ y $\bullet_D$.

**Fig. 1.** Potencial asimétrico dado por la ecuación (2).

# 3 Sistema computacional

El problema que resolveremos consiste en encontrar los parámetros m y Fo ratchet determinista, a partir de una serie de tiempo de la velocidad y la posici la partícula. Resolveremos esto utilizando una red neuronal entrenada median algoritmo genético. A continuación (Fig 2) se muestra el funcionamiento del ma.

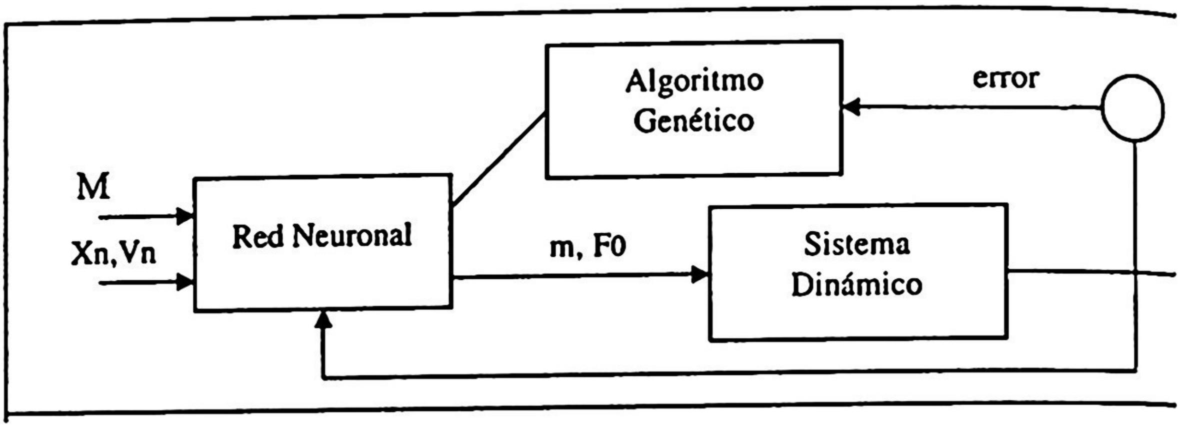


**Fig. 2.** Funcionamiento del Sistema. Donde *Xn=(x1,x2,...,xn)* es la posición de la partíc *Vn=(v1,v2,...,vn)* es la velocidad. *M* es la matriz de pesos de la red, la salida de la red son los parámetros estimados.

## 3.1 Red neuronal

### 3.1.1 Estructura de la red

La red neuronal que utilizamos está compuesta por tres capas: 1) la capa inicia tendrá en este caso 10 neuronas (nodos). Cada nodo de esta capa recibirá entrada un valor de la posición de la partícula en el tiempo t. Elegimos 10 neu para esta capa, por ser un número mediante el cual obtenemos suficiente inf ción del sistema para trabajar sin que disminuya la eficiencia. 2) la capa medi 4 neuronas. El encontrar el número óptimo de neuronas para la capa media, en ral se hace de forma muy empírica. Si son demasiadas neuronas, la velocid proceso disminuye, ya que el número de operaciones que se deben de llevar aumenta. Si el número de neuronas es muy poco el sistema tardará más en ger. 3) la capa final, compuesta por 2 neuronas. Cada neurona de esta capa, pro rá una salida, que eventualmente debe de ser la solución buscada, i.e., los dos metros estimados. Así, tendremos una matriz de pesos de U de 10x4 entre inicial y la capa media y una de V de 4x2 entre la capa media y la capa fina cialmente los pesos se generan aleatoriamente y son un número real p ∈ [0,1 dos matrices, tendrán que ajustarse en el entrenamiento para producir la sali seada. La función de activación • utilizada es la función sigmoide: •(x)=1/( [Hertz, Krogh, Palmer 91].

**Propagación de la señal**

partir de una matriz de pesos y un vector de entrada, la red neuronal debe de :ular una vector de salida. Esto se hace de la siguiente forma:

Sea X=[x1,x2,...,x10] el vector de entrada y U10x4 y V4x2 las matrices de peso la capa inicial y la media y la media y la final respectivamente. La salida de neuronas de la capa inicial es la entrada de la capa media. Como primer paso emos calcular la salida de las neuronas de la capa media, Y=[y1,...,y4] que está por:

$$Y_j = \bullet\left(\bullet_i (x_i\, u_{ij})\right)$$

de i=1,2,...,10, y j=1,2,...,4, uij es el elemento i,j de la matriz **U** y $\bullet(x)=1/(1+e^{-kx})$.

salida de la capa final Z=[z1,z2] sé calcula de la manera similar, sin utilizar la :ión de activación:

$$Z_j = \bullet_i (y_i\, v_{ij})$$

de i=1,...,4, y j=1,2 y vij es el elemento i,j de la matriz **V**.

salida **Z** son los parámetros estimados:

$$a = z_1, \quad w = z_2$$

i=1,...,4, y j=1,2 y vij es el elemento i,j de la matriz **V**.

**Entrenamiento**

forma en que entrenaremos la red neuronal será mediante algoritmos genéticos ~ldberg 89]. A este tipo de red se le suele llamar Red Neuro-Genética. Los indi- os, o posibles soluciones, con los que va a trabajar el algoritmo genético, son ices de pesos de la red neuronal, cada una de las cuales, junto con la entrada de :namiento, producirá una salida diferente de la red. Los pasos que se siguen son siguientes:

**Inicialización**

genera una población inicial aleatoriamente, es decir, se crea un cierto número eterminado de individuos los cuales son posibles matrices de pesos para la red. ste caso, cada dato en vez de ser un bit (como es usual en los algoritmos genéti- será un elemento de matriz.

**Evaluación**

vez inicializada la población, se calcula la salida que va a producir la red neu- con cada matriz de pesos, y la entrada de entrenamiento. La salida de la red los dos parámetros estimados. Para poder evaluar al individuo en cuestión, se :ne una serie de tiempo de la posición y la velocidad de la partícula utilizando uevos parámetros estimados en la ecuación de movimiento. Calculamos el error las dos series utilizando mínimos cuadrados. En base a este error le asignare- al individuo o matriz de pesos correspondiente una medida de desempeño (fit- Este procedimiento se repite para cada individuo de la población.

### 3.2.3 Selección con elitismo

Cuando ya ha sido evaluada la población y cada individuo tiene asignado un se lleva a cabo una selección. En este trabajo aplicamos el método de la ruleta método de selección estándar proporcional. Mediante este procedimiento se una nueva población con el mismo número de individuos que la población anteri Cada individuo tendrá una probabilidad de ser elegido proporcional a su medida desempeño, de esta manera, los mejores individuos tendrán más probabilidad elegidos, sin embargo, los peores individuos también pueden llegar a ser elegid evitando de esta manera caer en un óptimo local y permitiendo una mayor diverdad. El mejor individuo de la población actual siempre pasará a la siguiente.

### 3.2.4 Cruza y mutación

A la nueva población seleccionada se le van a aplicar los operadores cruza y ción. Para la cruza, se seleccionan dos individuos de la nueva población. Se elige punto de cruza pc, que será un renglón y una columna de la matriz. Se dividen ambos individuos, y se concatena el principio del primero con el final del segund viceversa. Para la mutación, se elige uno o dos puntos de mutación, que serán bién un renglón i y una columna j de la matriz. El dato $a_{ij}$ será sustituido por constante proporcional a su valor original, $ka_{ij}$, donde k es un valor elegido riamente dentro de un rango generalmente (0,1). De la población total, un porcen PC de individuos será cruzado y un porcentaje PM de individuos será mutado. porcentaje de mutación PM, es muy grande, puede provocar que se pierda infor ción histórica sobre los individuos, si es muy pequeño, puede caerse en un local, ya que los individuos producidos por cruzamiento, no producen informa nueva. En esta implementación elegimos PC=80% y PM=20%, ya que fueron valores que produjeron los mejores resultados.

Una vez producida una nueva generación, se evalúa, y se vuelven a aplicar operadores cruza y mutación. Esto se repite hasta que se encuentre un individuo produzca una salida satisfactoria.

## 4 Resultados

Hicimos un número grande de pruebas de nuestro sistema para diferentes valores los parámetros. Se observó que el sistema es confiable y eficiente tanto para periódicas como para órbitas caóticas.

Graficando el comportamiento de la evolución del desempeño de la red genética a través de las generaciones (Fig. 3), se observa, como es característico los algoritmos genéticos, una mejora dramática en las primeras generaciones, posteriormente una aproximación mas lenta al 1, siguiendo un comportamiento saturación. En general, en todas las ejecuciones realizadas se alcanza una medida desempeño mayor a 0.999 en las primeras 100 generaciones.

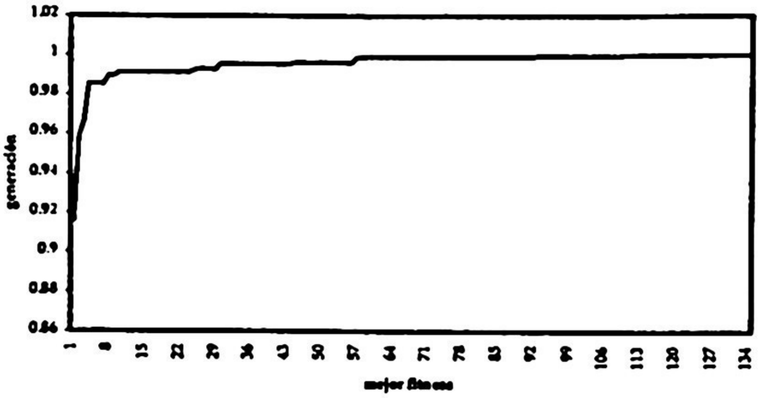

Fig. 3. Medida de desempeño del sistema (fitness) a través de las generaciones.

## ,onclusiones

era de esperarse, las trayectorias caóticas reales se separan de las trayectorias .ıidas utilizando los parámetros estimados, que generalmente tienen un error del de $10^{-6}$. Esto es debido a la alta sensibilidad que tienen los sistemas caóticos a perturbaciones en las condiciones iniciales o los parámetros en este caso aney 92, Ott 92, Peitgen 92]. El tiempo que las trayectorias permanecen juntas aumentar si disminuimos el error en la estimación, lo que se logrará con un :ro mayor de iteraciones del programa. Dependiendo de la aplicación que se le dar al problema, se decide la precisión que se necesita, tomando en cuenta mientras mas preciso sea el resultado el tiempo de ejecución será mas largo.
,onsideramos que la contribución de este trabajo, es: por un lado, la creación de :stema computacional útil para resolver el problema de estimación de paráme- Se muestra de esta manera la gran utilidad de las redes neuronales y los algo- genéticos, como una herramienta computacional, capaz de superar otras téc- computacionales con mucha ventaja. Por otro lado el trabajo contibuye a abrir ımino en la difícil tarea de caracterizar la dinámica de los ratchets, donde, a del gran auge que ha tenido la investigación en el tema en los últimos años, queda mucho por hacer, y dadas las múltiples aplicaciones que tienen los *rat-* consideramos que las contribuciones que se puedan hacer en este campo, por de nuestro enfoque pueden resultar de suma importancia.

## rencias

ioldberg, D. E. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. *Addi- ɔn-Wesley Publishing Company.* NY 1989

1ichell, M. An introduction to genetic algoritms: complex adaptive systems. *MIT ⁻ress.* EEUU 1998

3. Poli, R., Langdon, W. Foundations of genetic programming, *Springer Verlag*, NY
4. Bard, Y. Nonlinear Parameter Estimation. *Academic Press*, NY, 1974
5. Beck, J.V. , Arnold, K.J. Parameter estimation in engineering and science. *series in probability and mathematical statistics*. J. Wiley, NY, 1977
6. Gallant, A.R., Nonliner statistical models. *Wiley*, NY, 1987
7. Jorgesen, S.E., Fundamentals of Ecological Modelling 2da ed. *Elsevier*, Amster 1994
8. Park,T., Froment, G. "A hybrid genetic algorithm for the estimation of parameters detailed kinetic models", *Computers chem. Engng*. 22, 1998
9. Whigham, P.A., Rechnagel, F. "Predicting chlorophyll-a in fresh water lakes by ing process/based models and genetic algorithms. *Ecological Modeling*, 146, 200
10. Astumian, R.D., Hänggi, P., "Brownian Motors", *Physics Today*, Nov. 2002.
12. Cortés, E., "Ratchet motion induced by a correlated stochastic force". *Physica A* 2000
13. Jung, P., Kissner, J.G., Hänggi, P., "Regular and chaotic transport in asymetric peri potentiales: inertia ratchets". *Phys. Rev. Lett*, 76, 1996
14. Hänggi, P., Bartussek, P., Nonlinear Physics of Complex Systems, *Lecture Note Physics*, 476, Berlin 1996.
15. Magnasco M.M., Forced Termal Ratchets, *Physical Review Letters*, 71-10, 1993.
16. Mateos, J.L., "Current reversals in deterministic ratchets: points and dimers", *D*, 168, 2002
17. Mateos, J.L., "Chaotic Transport and Current Reversal in Deterministic Ratche *Physical Review Letters*, 84-2, 2000
18. Reimann, P., "Brownian motors: noisy transport far from equilibrium", *Phys. Rep* 361, 2002.
19. Sarmiento A., Hernán Larralde, "Deterministic transport in ratchets", *Physical E*, 59-5, 1999
20. Fausett L., Fundamentals of Neural Networks: Architectures, Algorithms and Appl tions, *Prentice Hall*, NJ 1994
21. Hetz, J., Krogh, A, Palmer, R.,Introduction to the theory on neural computation. *son Wesley*, NY, 1991
22. Kohonen, T., Self-Organization and Associative Memory, 2da. ed., *Springer-* Berlin, 1984
23. Rojas, R. Neural Networks. A Systematic Introduction. *Springer Verlag*. Berlin 1
24. Rumelhart, D.E., McClelland, J.L., Parallel Distributed Processing, *MIT Press*, bridge, 1986
25. Tenorio, M.F., Lee, W.T. "Self organizing network for optimum supervised learni *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1, 1990
26. Devaney, R.L. Chaotic dynamical systems, *Addison Wesley*, NY, 1992
27. Greborgi, C., Ott, E., Yorke, J.A., "Chaos, strange attractors, and fractal basin bou ries in nonlinear dynamics", *Science*, 238, 1987
28. Ott, E. Chaos in Dinámical Sistems, *Cambridge University Press*, NY, 1993
29. Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D. Chaos and Fractals: New Frontiers of Scie *Springer-Verlag*, NY, 1992
30. Rasband, S.N., Chaotic dynamics of nonlinear systems, *John Whikey & Sons*, NY,